

以提升实践性为核心的《线性代数》课程改革探究

艾霖斌, 李金秋, 胡薇*

昭通学院数学与统计学院, 云南昭通, 中国

*通讯作者

【摘要】《线性代数》传统教学面临理论抽象、学生兴趣低、跨学科应用脱节等问题。为响应新工科建设要求,提升本科教育质量和创新人才培养,本文以“提升实践性”为核心,提出融合案例库、分层题库与项目式学习的教学模式。在常规教学场景中辅以案例教学法,采用分层题库提供从基础到综合的阶梯训练,组织开展项目实践,引导学生将抽象知识应用于解决实际问题,以提升学生应用能力,破解学用分离的困境,并详细介绍了“矩阵及其运算”章节运用该模式的教学实施方案。

【关键词】线性代数;项目式学习;案例库;分层题库

【基金项目】昭通学院一流本科课程《线性代数》(项目编号: Ztujk202543);昭通学院课程思政示范项目——《线性代数》(项目编号: ZTUsz202505)

1.引言

我国新工科建设强调培养兼具多领域专业素养的复合型人才^[1]。数学应用能力作为理工科人才的核心素养,已不仅限于理论和计算,更注重将线性代数等数学工具与人工智能、智能制造、新能源等实际工程场景深度融合,传统大学数学教学已不能满足新工科人才培养的需要^[2]。

《线性代数》作为理工科基础课程,在支撑一流人才培养中具有关键作用^[3]。其涵盖的行列式、矩阵、线性方程组及向量空间等内容是后续多门专业课程的基础,也是培养学生抽象思维、模型构建、问题转化、高维空间几何想象等能力的重要载体。但是,当前《线性代数》课程的传统教学模式面临多重困境。首

先,课程内容理论抽象、直观性差,如向量空间等核心概念缺乏几何或物理背景铺垫,学生难以建立直观认知。其次,学用分离导致教学未能贴近学生日常生活,也未能衔接学生后续课程^[4]。再者,教学方法单一,课堂长期以教师为中心,遵循“教师讲、学生听”的流程。课时少导致进度过快,缺少互动与探索,学生解决问题能力得不到锻炼^[5]。最后,评价方式侧重期末笔试,主要考查定义、定理和计算的记忆,无法有效衡量运用数学工具解决实际问题的能力,进一步强化了重知识、轻能力的倾向^[6]。

项目式教(PBL,Project-Based Learning)^[7]、案例教学^[8]和分层训练题库是破解上述难

题的有效路径。在授课过程中以真实问题为例,在实践环节将线性代数知识融入贴近大学生生活的具体项目中,使学生通过实践理解理论内涵,提升应用能力与学习主动性。从人才培养角度看,提升学生知识应用能力契合新工科目标。学生在完成项目的全过程中,不仅能深化对课程内容的理解,更能锻炼问题解决、团队协作与创新思维,实现知识、能力与素养的协同发展。基于此,本文构建了以案例库和分层题库为资源基础、以项目式学习为根本驱动的课程改革模式,如图1。

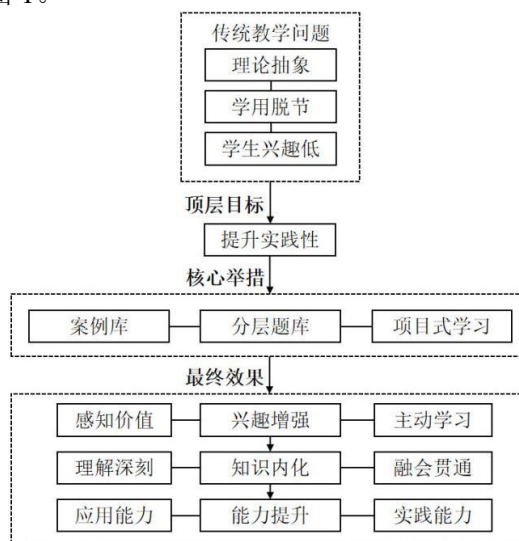


图1.基于提升实践性的《线性代数》课程教学改革改进路径图

然而,PBL在线性代数课程中的推广仍面临挑战。例如,线性代数PBL若仅聚焦矩

阵运算在图像处理中的应用，易忽视其与行列式、线性方程组的逻辑关联，导致学生知识建构不系统。多数教师因缺乏实践经验，难以设计符合贴近实际生活的项目，同时教师在PBL中作为“引导者”的角色适应上也存在困难^[9]。为推动PBL的广泛深度应用，需着力解决项目设计悬浮于生活之上的痛点。应聚焦于开发生活化、场景化的教学案例与分层题库，确保学习素材紧密围绕学生可感知的实际情境，构建从生活中来，到应用中去的完整学习模式。

2. 资源基础构建

2.1 案例库的设计与理论基础

案例库的构建遵循理论联系实际的教育理念，并非简单地在讲完一个概念后附上一个应用例子。其深层含义在于从一个真实的、易于理解的现实世界问题出发，让学生感受到“我们为什么需要学习这个？”。引导学生将实际问题抽象、翻译成线性代数的语言，如：向量、矩阵、线性方程组、特征值等，建立数学模型。搭建抽象数学概念与实际生活之间的桥梁，使学生通过具体场景理解线性代数工具的应用价值。通过分层递进的案例设计帮助学生实现从知识理解到创新迁移的能力跨越，促进认知层次的螺旋上升^[10]。

在案例筛选与设计上，遵循以下原则：

(1) 目标导向原则，所有案例设计都必须紧紧围绕课程的教学目标；(2) 渐进性与系统性原则，案例库的结构应符合认知规律，由浅入深，形成体系；(3) 问题驱动与真实性原则，这是理论联系实际理念的直接体现。

案例的三种基本类型：(1) 基础认知型，概念直接、计算简单、旨在直观理解某个单一概念；(2) 综合应用型，涉及多个知识点，需要一定的建模和计算过程；(3) 创新探究型，问题更开放，旨在培养学生的创新和深入研究能力。

2.2 分层题库的构建逻辑与理论依据

线性代数分层题库的构建逻辑源于因材施教与最近发展区理论，其核心功能定位是实现个性化教学与学生的能力阶梯式提升。它通过科学的分层，为不同认知水平和学习目标的学生提供精准的学习路径，避免“一刀切”的教学弊端，确保每位学生都能在原有基础上获得最大发展。

题库的分层依据主要包括三个维度：知识掌握程度、实践应用难度以及创新思维要求。依据这三个维度，题库划分为三个层级：

(1) 基础巩固层：旨在夯实概念与基本技能。题目通常指向明确，这一层是全体学生必须掌握的基石。例如，给定具体矩阵进行乘法运算、计算行列式的值，或线性方程组解的判断。(2) 能力提升层：侧重于知识点的交叉融合与在典型场景中的应用，题目通常具备一定的综合性和情境性。例如，将一个具体的经济投入产出模型抽象为线性方程组，并讨论其解的存在性与唯一性，或者要求利用矩阵的特征值与特征向量分析一个简单振动系统的稳定性。(3) 创新挑战层：面向学有余力的学生，强调探究性与开放性。题目通常没有标准答案，需要学生整合多领域知识，提出并解决新问题。例如，给定一个来自推荐系统的真实用户物品评分矩阵，要求设计算法预测缺失评分，并论证其原理与矩阵分解之间的内在联系。

题目源于案例，案例支撑题目拓展，例如，在学习了“校园饮品店经营”案例后，基础层题目是计算两个矩阵相乘的结果。能力提升层则是饮品店在周末推出促销，所有饮品单价打8折。(a) 请通过矩阵运算，表示新的单价向量。(b) 利用新的单价和原订单矩阵，计算周末订单的总收入。(c) 如果糖份包的成本上涨了50%，请计算完成订单所需糖份包的总成本增加了多少？创新挑战层可引导学生探索设计一个“每日明星套餐”，利用矩阵运算，设计一个模型，能够快速计算出任意一种组合套餐的总售价和总成本。通过这种“案例引路，题库搭梯”的联动机制，分层题库不仅是一个评估工具，更成为一个引导学生从理解、应用到最终实现知识创新的动态学习系统。

2.3 项目式学习的理论框架

PBL的实践深深植根于三大核心教育理论，它们共同构成了其科学性与有效性的基石。首先，建构主义学习理论是PBL的哲学核心。该理论认为，知识不是被动接收的，而是学习者在与环境的互动中主动建构的。PBL彻底颠覆了“教师讲、学生听”的传统模式，将学生置于学习过程的中心。在解决一个复杂项目的过程中，学生需要自主搜集信息、批判性思考、团队协作与试错反思，从而在其原有认知上，主动建构起对线性代数等学科知识的深层、个性化理解，并提升解决实际问题的能力。其次，情境学习理论为PBL提供了方法论指导。该理论强调，学习与它所发生的情境、文化与活动密不可分。

PBL 通过设计与行业前沿、现实生活高度契合的真实项目，将抽象的理论知识置于具体、有意义的情境之中。这极大地增强了学生的学习内驱力，并促使他们理解“何时、为何以及如何”应用所学知识，从而实现从惰性知识到可迁移能力的转化。最后，能力本位教育理论确保了 PBL 的教学成效可衡量、可达成。该理论主张教育设计应以终为始，即首先明确期望学生最终应具备的能力目标，再逆向设计教学活动与评估标准。在 PBL 中，一个合格的项目成果本身，就是综合能力的物化体现。教师以此成果反推，精准定义出项目中需要培养的特定能力维度，从而使整个学习过程目标明确、评价有据，切实保障了人才培养的质量。

3. 以《线性代数》“矩阵及其运算”章节教学实施方案为例

围绕“校园饮品店经营数据分析”项目，将教学流程重构为“项目引入-知识探究-应用实践-成果构建”的循环。

第一阶段：项目启动（1 课时）

目标：激发兴趣，明确学习目标，引导学生进入项目情境。

课前准备：第一，预习教材，要求学生预习教材：同济大学数学科学学院. 工程数学——线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2023. 第二章第 1、2、3 节线性方程组和矩阵、矩阵的运算及逆矩阵。第二，发布基础认知型案例，订单总价的快速计算。从一个订单入手，引导学生将其视为一个行向量，与单价列向量 P^T 进行运算。通过“对应项相乘再求和”的计算过程，自然引出矩阵与向量的乘法，并解释其经济意义——快速计算点积（总价）。第三，初步思考，提出讨论题：“你认为矩阵是什么？它和我们学过的行列式有什么不同？”

项目引入（课中 20 分钟）：教师展示饮品店的背景故事和项目核心任务，假设某饮品店在午休高峰的销售数据如下：

饮品单价向量 P ：

咖啡 (C_1)：4 元；奶茶 (C_2)：6 元；果汁 (C_3)：5 元。

$$P = (4 \quad 5 \quad 6) \quad (1)$$

订单矩阵 O （行代表不同订单，列代表饮品品类）：

订单 1：2 杯咖啡，1 杯奶茶，0 杯果汁；
 订单 2：1 杯咖啡，0 杯奶茶，3 杯果汁；
 订单 3：0 杯咖啡，2 杯奶茶，1 杯果汁。

$$O = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

任务清单：任务 1（矩阵乘法与总收入）：计算这三个订单的总收入。任务 2（矩阵乘法与原料消耗）：已知制作一杯咖啡、奶茶、果汁分别需要 1、2、1 个单位的“糖份包”。请计算完成这三个订单总共需要多少单位的“糖份包”。任务 3（逆矩阵与成本分析）：店主发现两个套餐的销售收入：套餐 A（1 咖啡+1 奶茶）收入 10 元，套餐 B（1 奶茶+1 果汁）收入 11 元。能否通过矩阵运算反推出每种饮品的单独成本？

引导学生思考：“如果没有矩阵，我们该如何计算这三个订单的总收入？”。教师进而提问：“如果有 100 个订单，1000 种商品呢？我们需要一种更强大、更简洁的数学工具。”

由此引出本章学习目标：掌握矩阵及其运算，成为高效的“数据分析师”。

第二阶段：知识探究与课中讲解（2-3 课时）

目标：系统学习线性方程组、矩阵运算规则，并通过案例理解其应用价值。

第一课：线性方程组和矩阵

讲解：结合教材，精讲线性方程组、矩阵的定义、矩阵的相等，以及矩阵乘法的规则。

案例链接：深入讲解综合应用型案例，物料需求计划的制定。展示如何用矩阵 O （订单）和矩阵 F （配方）表示问题。一步步推导 $O \times F$ 的计算过程，并重点强调结果矩阵中每个元素的现实意义（例如，第一行第一列的数字代表“完成订单 1 所需原料 1 的总量”）。

使用分层题库进行课堂即时练习：让学生在黑板上计算一个简单的矩阵与向量相乘，巩固计算法则（基础巩固层题目）。引导学生讨论“单价打 8 折”如何用矩阵运算表示，并计算新的总收入（能力提升层题目）。

第二课：逆矩阵

讲解：讲解逆矩阵的定义、性质和求解方法，为后续铺垫。

案例链接，引入创新探究型案例：商业决策中的“逆向思维”。引导学生将套餐问题建立为线性方程组。提出核心问题：“已知 A 和 b ，如何求 c ？”从而自然引出逆矩阵 A^{-1} 的概念，并说明 $c = A^{-1}b$ 就是方程组的解。

课堂即时练习：讲解一个简单的 2×2 矩阵求逆的例子，并验证 $AA^{-1} = I$ 。

第三阶段：应用实践与课后深化（课外1课时）

目标：巩固知识，训练技能，为完成项目报告做准备。

课后习题布置：必做题是完成本章题库中所有基础巩固层题目，确保每位学生掌握基本计算。选做题是能力提升题目，鼓励大部分学生尝试。挑战题是学有余力的学生可尝试创新挑战层题目，作为项目报告的加分项。

项目实践：学生以小组（3~4人）为单位，协作完成项目任务。教师巡视指导，回答学生在计算和理解上遇到的问题。鼓励学生利用案例库作为参考，模仿其分析思路来解决项目问题。

第四阶段：成果构建与评价反馈

目标：输出学习成果，进行评估与总结。

项目成果提交：各小组提交一份《饮品店经营数据分析报告》。

报告要求：展示任务1、2的完整计算过程。对任务3的探究：阐述如何建立方程组，并尝试求解，即使不完全成功，也需展示思考过程。

评价与反馈：评价方式上，采用多元评价。教师根据报告的逻辑性、计算准确性和深度进行评分（70%），同时结合课堂练习（15%）和小组互评（15%）。课堂总结上，教师选取优秀报告进行展示，总结本章知识点，并再次强调矩阵运算在解决批量性、关联性实际问题中的巨大优势。将项目中的概念，如：订单矩阵、配方矩阵与教材中的抽象定义一一对应，实现从实践到理论的升华。收集学生在项目实践和题库练习中普遍出现的难点和反馈，用于优化下一个教学周期的案例库表述和调整分层题库的难度梯度，实现动态优化。

通过以上四阶段的实施，学生不再是被动地接收公式，而是在一个完整的、有意义的项目驱动下，主动利用案例库和题库资源，一步步地构建知识、训练技能，最终输出一份体现其综合应用能力的项目报告，真正实现了学以致用。

4. 结语

本文针对《线性代数》课程传统教学困境，以提升实践性为核心，提出将项目式学习贯穿教学全过程，通过真实问题驱动学习，并辅以贴近实际生活的案例及分层题库。详细介绍了“矩阵及其运算”章节教学实施方案供参考，该模式能激发学生主动性，促进知识内化与应用能力培养，实现从“知识传授”到“能力培养”的转变，为破解学用分离难题提供有效路径。

参考文献

- [1]王双喜,董晨瑶,叶玮琳,等.基于新工科建设要求的复合型人才模式探索与实践[J].大学教育, 2025, (20): 116-120.
- [2]黄云清.基于新工科理念推进大学数学教学改革[J].中国大学教学, 2020, (Z1): 28-31.
- [3]袁健,王菊香.关于线性代数课程中理论和方法具象化的探究[J].科技风, 2024, (06): 55-57.
- [4]曹宏举,郭巧丽.“金课”背景下强化线性代数应用教学的实践与探索[J].大学数学, 2021, 37(02): 24-29.
- [5]姚婷.基于以学生为中心的“线性代数”课堂教学改革策略研究[J].黑龙江教育(理论与实践), 2025, (09): 64-66.
- [6]姜爱平,许新忠.创新型人才培养目标下高校公共数学类课程教学创新实践——以宁夏大学公共基础课线性代数为例[J].大学数学, 2023, 39(03): 37-46.
- [7]谢丽娟.基于项目化学习的线性代数教学策略探究[J].科教导刊, 2024, (29): 63-65.
- [8]梁填,张文超.基于案例式教学的线性代数课程思政教学改革实践与探索[J].大学教育, 2024, (20): 82-86.
- [9]栾秀春,高璞珍,王晓莺,等.案例教学法在工科专业数学课程教学中的应用[J].高等工程教育研究, 2021, (03): 169-172+189.
- [10]周康宝.拾“阶”而上,深度体验,实现认知层次的螺旋提升[J].中学数学, 2024, (12): 122-123.