

HPM 下数学探究学习建构研究

纪宏伟¹, 陆正美^{2*}

¹南通师范高等专科学校初等教育学院, 江苏南通, 中国

²江苏省如东第一高级中学, 江苏南通, 中国

*通讯作者

【摘要】在新课改背景下, 探究式学习受到了高度关注, 其主要在于打造完善的学习方式, 帮助学生提升创新意识, 形成知识利用能力。从当前实际可知, 在高中数学教育工作中, 探究式学习的利用效果并不是非常好, 学生很少参与探究学习, 对于探究式学习的认识程度并不是非常高, 导致教育质量受限。将 HPM 作为将数学史与数学教育有机融合方面的研究成果融入探究式学习, 能够帮助学生进一步提高探究式学习质量。本文针对相关内容进行了综合性的讨论与分析, 首先阐述了探究性学习的概念, 其次列举了 HPM 的概念, 探讨了高中数学课堂开展探究性学习的意义, 最后提供了 HPM 下数学探究学习建构策略。希望针对有关内容的探讨, 能够在 HPM 下, 使数学探究学习教育质量得到有效优化。

【关键词】HPM; 数学; 探究学习; 数学史; 教学生成

【基金项目】江苏省教育科学“十四五”规划重点课题“基于 HPM 的教学难点分析与突破策略研究”(项目编号: B/2022/03/90), 第八批江苏省教育科学规划精品课题。

1. 引言

探究式学习是学生掌握知识和提高能力的重要方法, 对于提高学生兴趣, 优化学生学习自信, 引导学生学习知识来讲, 具有非常重要的意义。因此必须实现教学结合, 使学生能够在多元化的方式基础上, 提高自身的教育质量。HPM 作为将数学史融入数学教学的重要方式, 借助这一方法能够有效提高教育质量, 优化学生的教育思想, 对于开展探究式学习来讲, 具有非常重要的意义。在开展数学探究的过程中, 必须打造完善的教育策略, 以此促进学生的全面发展, 因此 HPM 下数学探究学习建设就成为当前讨论的重点。

2. 探究性学习的概念

探究学习也叫做发现学习, 指的是人通过自然、社会、文字、材料等方式发现问题, 获取数据, 形成解释, 并对这一解释进行深入分析与检验的过程[1-3]。学习是一种积极学习过程, 能够让学生在数学学习中找到问题, 并基于这些问题进行深入分析。教师在开展探究教学的过程中, 可以让学生在自身的帮助下, 利用科学探究的方式来学习与利用知识。但在以往的数学教育工作中, 教师只是让学生掌握大量的知识概念和原理, 这样的教学方式可能会使学生陷入误区, 学生在学习中也产生各种质疑, 因此开展探究

学习, 就具有更重要的意义。借助探究学习能够帮助学生找到学习方向, 优化学习质量, 使学生能够在问题探究的基础上, 找到学习重点, 以此带动学生的发展。

3. HPM 的概念

数学史是数学知识不断发展与迈进的记录, 对于人类的建设来讲, 同样具有非常高的价值。数学史在数学教育工作中, 也能够发挥出非常积极的作用。在这一认识的基础上, 第 2 届国际数学教育大会中, 就成立了数学史与数学教育关系国际研究小组, 这一小组简称为 HPM。因此, 数学教育之间的关系就成为数学教育研究中的重点。在当前所提到的 HPM 已经不再指这一国际研究小组, 而是指数学史与数学教育之间的关系这一领域。在本次研究中所提到的 HPM 也指的是数学史与数学教育之间的关系, 探讨方向也是数学史在高中数学探究学习中的利用, 希望能够借此带动学生的成长, 有效优化高中数学教育质量, 使学生能够在探究学习的基础上, 提高自身的整体学习效[4]。

4. 高中数学课堂开展探究性学习的意义

4.1 有利于提高学生的创新能力

对于任何人来讲, 如果没有探究能力, 都会使其终身发展受限。学生在实际学习中, 很少关注自身探究能力的成长, 导致学习质量受到了严重限制。当前, 我国教育部门对

于学生创新能力的重视程度明显提高,希望打造出多元化的教育体系,帮助学生能够提高自身的综合素养,使其创新能力能够满足未来发展要求。在未来社会建设中,对于创新人才的要求越来越高,其必须拥有创新精神与创新能力,打造完善的创新教育体系,满足创新教育要求[5-7]。因此在数学教育工作中,教师需要合理利用课堂教学,提高学生的创新能力。相较于高中教学的其他学科来讲,数学本身对于逻辑思维的要求较高,借助探究学习能够帮助学生进一步提高自身的学习质量,在互动交流的基础上,提高自身的综合学习水平[8]。而在这一过程中,为了帮助学生解决自身存在的问题,会开展多元化的教育创新。在教师的帮助下,学生需要有效提高自身的创造思维,优化自身的创新能力,使自身的成长更符合社会未来要求,满足社会建设需求,为社会发展提供更多的高素质人才。

4.2 有利于提升学生学习的兴趣

在高中数学教育工作中,需要带领学生不断发展,提高学生的学习兴趣,帮助学生能够积极融入到数学教育中。借助这一方式,可以提高学生的综合能力,使其形成更强的数学学习意识。在数学学习中,需要基于数学知识的综合性和逻辑性,按照数学教学方法的要求,制定出完善的教育体系,让学生在数学知识的基础上,转变自身的学习心理,提高学生的课堂注意力。教师还需要与学生进行积极的互动情况在交流中,加深对于学生的了解,打造更符合学生要求的教育体系和教育策略,制定出完善的教育计划,提高学生的思维能力。在开展数学教育工作中,学生可以在学习新知识的过程中复习旧知识,使自身能够积极地融入到数学学习,在教师的帮助下优化知识储备,形成完善的学习体系,提高自身的综合素养。

4.3 有利于提高教师的教学水平

现代教育模式主要是在传统教育改革基础上形成的,因此教师在教育工作中,需要打造出多元化的教育体系,在课堂中利用更优秀的教育技能,提高数学教学的整体素养,帮助学生融入数学教育[9]。开展探究学习能够使使学生主动参与数学学习,这一教育方式相较于传统教学方法来讲,存在明显差别。因此教师要基于创新教育制定出完善有效的教育探究策略,帮助学生能够积极地融入其中,满足时代发展要求。教师需要从自身的

教育经验角度进行教育优化创新,打造出完善的教育体系,帮助学生融入到教育改革之中,带动学生实现整体化建设,为学生的未来成长奠定基础。

5.HPM下数学探究学习建构策略

5.1 设置探究性的结束环节

课堂教育质量与课堂结束环节有非常紧密的关系,而在这一环节需要优化整节课的内容,帮助学生进行知识点的整理与分析,并帮助其形成完整的知识脉络,掌握知识内涵。此外,课堂结束环节还需要起到承上启下的价值,使学生对于下一节课的内容形成兴趣。借助探究性学习能够有效优化结束环节的效果,教师可以在结束环节设置相应的探究问题,引出下一节课的知识,帮助学生提高自身的学习质量。因为所有学生的学习能力和知识水平都存在明显差别,在课堂结束环节利用数学史开展数学教学能够为不同水平的学生提供帮助,使学习较好的学生可以开展深入探究,也能够为学习较差的学生提供启发。例如在课堂上,教师可以讲述这样的故事:陈景润教师在课堂结束后曾跟自己的学生说:“在自然科学中,数学处于皇后的位置,皇后头上的皇冠就是数论,而哥德巴赫猜想则是皇冠上最璀璨夺目的明珠,为了这颗明珠,很多数学家倾尽一生,也不知最后谁能把这颗明珠摘下来呢?”而正是陈景润教师的启发,才使这个世界上有了第一位攻克哥德巴赫猜想的人。教师通过这样的数学史能够使使学生对于数学知识与概念形成探索欲望,主动查找有关哥德巴赫猜想的相关资料,了解攻克第一人到底是谁。通过这样的讲解方式,可以使学生在课后继续进行知识的学习,对于学生提高自身的学习质量来讲,也具有极大的促进效果[10]。

5.2 借助历史引出系列知识

每个系列的知识都是经过了长时间的历史发展才形成的,在每个环节中涉及到的知识都有无数的数学家倾尽一生,受到无数挫折。在数学教育工作中,需要实现历史与逻辑的统一,要尊重数学历史,还要寻找恰当的教学路径开展深入探究,打造合适的数学情景与教育方法。在高中数学教育工作中,教师需要将学生学习知识的过程看作是一个环节,而在不同环节中需要使用历史事件来形成完整的知识体系,向学生讲述不同环节知识生产过程。如果进度条件允许,教师可以开展适当的专题性讲解,向学生讲述与数

学史有关的内容。例如知识的背景、知识的影响力,或者是其在现实生活中具体应用到了哪些方向,帮助学生在大脑中进行知识梳理,让学生对这些知识形成全面的知识理解,借此有效提高教育质量。例如在讲解复数相关知识之前,可以为学生简单的讲解数系的拓展过程[11]。在古代生活中,为了计数形成了自然数的概念,从零开始自然计数。对物品进行分割,形成了分数。而为了表示相反,则引入了正负数。在勾股定理中发现了无理数。因为负数不能开方所以引入了虚数,并将实数扩展到了复数之中,最终就形成了完善的知识体系。这一体系能够让学生加深对数学整个发展过程的理解,帮助学生提高自身的學習质量,对于掌握变化发展观点来讲,具有非常重要的价值。

5.3 开展深度探究学习方案

所有的数学知识在教育工作中,都是通过观察、实验、交流、分析、综合、推理与总结形成的,在教科书上却并没有为学生展示这一过程。因此教师则可以从数学史的角度出发,针对某个概念的形成过程以及其关键特点进行分析。在数学教育的过程中,学生可能会感觉学习比较困难,只是理解概念的表面含义,对于概念的深层内容并不了解,但如果能够帮助学生从认知规律的角度开展知识教育,则可以帮助学生加深对有关内容的理解。教师需要合理分析数学概念,进行知识重构,使教学能够更加有效。在探究学习中,数学史还有另一个非常重要的作用就是打造教学情景。而要想创设良好的教学情景,帮助学生融入其中,就需要使情景形成更强的吸引力,而且要满足学生的实际发展要求,可以分析知识生产的过程[12]。通过这一方式能够帮助学生提高自身的學習质量,对于学生的后续发展,也具有更高的价值。在开展探究性教学的过程中,要从学生发展的角度出发,合理优化学生的教育思维,帮助学生积极融入其中。例如在讲解等可能性事件相关知识的过程中,教师就可以讲述在授课当天有关数学的事件,然后让学生思考这些事件都发生在今天是巧合还是正常现象,借此带动学生开展深入思考,帮助学生积极地融入数学学习之中,借助数学史带动学生成长。

5.4 基于历史提高教师素养

思想家培根曾提出,读史使人明智,因此为了使数学史和数学教育能够有效融合,

在教育工作中,教师就需要丰富自身的历史知识,提高自身的数学史水平。将数学史应用于数学教育工作中,还有很多问题需要解决,在面对这些问题会导致数学史在数学教育工作中的利用效果明显下降。这些问题主要体现在以下两个方面:第一方面是在有关调查中能够了解到,数学教师的数学史掌握程度并不是非常好,对于数学史的了解无法满足教育要求。主要是因为教师对于数学史的重视程度不足,虽然在高校中设置了数学史选修课,但是很少有学校会设置这一课程,依然是以专业知识为主。其次是教师可参考的教辅材料相对较少,虽然有关数学史的材料很多,但是大多数内容仅仅是进行概括性的阐述,很少将数学史和数学教育直接结合。因此教师在开展教学的过程中,必须基于自己了解的数学史进行重新改编,导致教师的工作量明显提高,使其在教学中很难利用这一方法开展教育。因此在教学中,教师需要解决的问题还有很多,必须从整体角度出发,帮助学生实现全面发展,以此带动学生的成长[13]。在这一情况下,教师首先就要解决自身对于数学史的了解不足的情况,形成更强的文化素养。数学文化素养不仅涉及数学,还有科学文化等方面。作为教师,必须提高自身的知识水平,形成更加广泛的兴趣爱好,提高自身的學習素养,为教师提供多元化的帮助,提高其综合水平,多阅读数学史相关书籍,与其他教师进行深入沟通、交流与學習,编写优秀的数学史教育案例。只有提高教师的历史水平,才能使教师在数学史的基础上,打造探究学习模式,帮助学生更好地融入到数学学习,在数学史的基础上开展探究与交流。

5.5 探究课堂有机融入史料

在课堂教学中,需要有机地融入史料,将其作为知识背景。在高中数学教育工作中,很多知识都是硬性融入的。对于学生来讲,很难理解这些知识,导致学生在學習的过程中,容易受到相关因素的影响。教师在课堂讲解中,只是让学生掌握公式,然而很多学生并没有理解这些数学的概念。要想解决相关问题,就需要在教育工作中,提到与之相关的背景[14]。借助这一方式不仅能够提高学生的學習动力,而且还能够使其學習质量得到有效优化。在开展数据的扩充与复数的引入课堂教育工作中,为了避免学生知识的學習效果受限。在教学中,教师可以先提出问

题, 让学生将 10 分为两部分, 使二者相乘为 40, 这一问题是由 16 世纪的意大利数学家卡尔达诺提出的, 教师可以让学生计算这样的两个数是否存在, 学生则可以通过方程判定这样的数不存在。随后, 教师则可以提出另一个问题: 在这一问题提出的数十年后, 同样是一位意大利数学家邦贝利在研究中发现 $X^3=15x+4$ 有三个实数根, 分别为 4, $-2 \pm \sqrt{3}$ 。在三次方程求根公式时得到了一个错误的概念: 实数 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ 。从常识角度来讲, 在根号下不可能有负数, 所以这个发现也受到了高度重视。为了解决这一问题, 法国数学家笛卡尔引入了虚数的概念, 也就是与实数相对, 新的虚的数。在 16 世纪之前, 人们并没有重视虚数, 而在 16 世纪也没有发现任何事物能够证明这样的数存在, 所以虚数并不被承认, 连牛顿也曾认为虚数在数学研究中并没有任何意义, 其认为将虚数融入数学是不符合实际的, 仅仅是幻想, 是通过投机取巧, 让不可以解答的问题拥有了规律。直到 18 世纪, 欧拉在不断努力与探索的背景下, 将虚数的单位定义为 i , 让虚数拥有了特殊的符号, 使虚数的表示更加简单并有特点, 复数的重要性也进一步展现出来, 在复数方面的理论研究也更加完善。而这些与数学家的努力之间有着非常紧密的关系。在介绍了复数发展背景后, 学生能够对于复数形成更加深刻的认识, 也可以激发学生的积极向上的品质, 帮助其不断提高自身的学习质量。

5.6 建设激趣型的探究课堂

激励型的课堂是以学生兴趣为基础提出的, 其主要指的是: 为了顺利开展数学探究性学习, 要先激发学生的学习兴趣。将数学史融入到数学探究性学习能够丰富历史资源, 与现实资源有效结合。首先是要丰富探究情景, 使学生形成探究兴趣。在确认探究主题之后, 教师在提供探究情景时, 可以选择一些与数学史料相关的内容作为辅助材料, 如增加一些数学家的故事, 或者与这一主题相关的故事来吸引学生的兴趣。例如在讲解等比数列前项和的相关知识时, 教师可以打造具有吸引力的场景, 使学生能够积极融入其中, 例如非常有名的棋盘放麦粒的故事。通过这样的探究能够让学生很快发现每个棋盘格中放的麦粒数为 1, 2, 4, 8, 16... 构成了等比数列。而要想知道棋盘中所需麦粒的

总数, 就需要计算数列的前 64 项和。通过这样的故事, 能够进一步提高学生的学习兴趣, 使学生经过探究确定等比数列的前 n 项和。其次是展现历史中的挫折吸引学生的兴趣。在开展探究的过程中, 可以针对学生出现过的问题, 对比历史上数学家所遭遇的挫折, 鼓励学生形成自信, 激发学生的学习兴趣[15]。例如在讲解椭圆形的周长相关知识时, 就可以开展探究性学习。在历史上, 数学家在研究椭圆形周长时出现了错误结论, 因此可以培养学生的自信, 激发学生的学习动力。早在公元前三世纪阿基米德就提出了椭圆的面积公式。而在这一基础上, 则要引发学生思考, 怎样计算椭圆的周长, 按照以往学习的知识可知, 圆的外切正方形的周长之比等于它们的面积之比: $C_{圆}: C_{方}=S_{圆}: S_{方}=\pi:$ 4。23 世纪意大利数学家斐波那契把这个结论类比到椭圆之中, 认为椭圆和外切长方形周长之比等于其面积之比: $C_{椭圆}: C_{矩形}=S_{椭圆}: S_{矩形}$ 。虽然斐波那契根据类比获得了椭圆的周长计算方式, 但是却是错误的。而教师则可以让学生在在此基础上进行探究, 使学生能够加深对于相关内容的理解。

5.7 打造引领型的实施方式

引领型方式主要指的是: 由教师的带领学生开展自主探究, 这种带领指的是教师并不以问题的形式开展, 而是进行数学史料的加工, 特别是针对其中的重点部分进行抽离重组, 增加或减少条件, 使学生能够加深对于有关内容的理解。在开展探究的过程中, 可以在关键位置引导学生针对问题进行分析, 利用历史帮助学生寻找到正确的方向。首先是可以重新构建探究背景, 帮助学生加深思考。在开展探究学习之前, 教师需要将和这部分知识有关的数学史知识融入其中, 为学生创造相应的场景。例如在讲解弧度制相关知识的过程中, 其属于数学教学中比较难的问题, 教师往往会直接进行概念讲解, 然后让学生进行习题练习, 掌握有关内容。这一方法能够使学生快速的掌握弧度制与角度制的转化, 但是也存在一定的问题就是: 学生对于弧度制是怎样形成的并不了解, 也不知道为什么要学习这一知识[13-15]。然而从 HPM 角度, 针对这一类问题进行探究可以利用以下方法: 先介绍历史上为了统一单位而开展的探索, 帮助学生进行深入研究。为了方便计算, 曾经有多次统一角与弦长单位, 按照历史发展顺序主要是, 希腊天文学家托

勒密在研究天文问题时所提出的计算方式。而在此之后则是印度数学家阿耶波多制作的单位，准确度在前人的基础上有所提高，而且改进了正弦的算法。最后则是瑞士数学家与物理学家欧拉提出的方式。从整个历史发展的角度来讲，弧度制概念是在三角函数的基础上形成的，弧度制的重点是统一弧长和半径之间的思维，这一思想受到了高度关注。因此，在以正弦计算的改进作为课堂主线能够形成弧度制，与学生共同融入弧度制的合理性与必要性分析中，降低弧度制定义所带来的影响。

5.8 完善结论型的学习策略

完善结论型教育方式主要指的是：基于一些数学结论教材并没有提供最终结论，而是通过解决不同的问题来进行深入探究。在学生拥有能力的基础上，教师可以针对不同情形，结合历史教学，帮助学生加深分析。这一方式不仅可以使学生对于相关知识形成深刻理解，而且还能优化学生思维完善。结论性探究主要分为三个部分，分别为搭建平台确认结论的来源、提供不同模型完善结论的认知以及设置问题强化结论的利用。例如在讲解柱体、椎体、球体体积公式的探究活动中，常见的是直接为学生提供公式然后练习。这一方式无法帮助学生了解公式来源。开展探究性学习则可以借助祖暅原理帮助学生开展探究，使学生加深对于相关知识的理解。祖暅原理也就是等积原理。“幂势既同，则积不容异”，势也就是高。简单来讲就是，几何体夹在两个平行平面之间，如果被平行于这两个面的第三个面截取获得的平面积相等，就代表他们的体积相等。借助这一原理能够深入分析柱体、椎体和球体的体积，从这一原理为基础搭建平台，帮助学生进行深入思考。为了推导球的体积公式，刘徽创造了一个新型的几何体。被称为牟合方盖。取八个棱长为一寸的正方体组成棱长为两寸的正方体，从纵横两个方向，各做大正方体内切的援助，两个圆柱体的公共部分外表向上下对称的牟合方盖。通过这一形体，能够帮助学生进行深入思考，开展深入探究，帮助学生掌握相关知识。

6. 结论

在高中数学教育工作中，要想提高探究式教育质量，就需要借助 HPM 有效优化教育水平，帮助学生提高自身的学习质量，以此带动学生发展。在教育工作中，教师需要从

实际情况出发，合理进行教育分析，帮助学生有效融入其中。教师要设置探究性的结束环节，借助历史展现系列知识，开展深度探究方案建设，提高教师数学史的融入能力，优化教师的综合素养，有效改善探究课堂水平，积极融入史料，以此促进学生的全面发展。教师在这一教育工作中，必须基于学生的实际情况开展合理分析，帮助学生提高自身的综合素养，使探究学习发挥出更加积极的作用。

参考文献

- [1] 王晓芬, 陈景文.HPM 视角下探究式教学课例研究——以“一元二次方程的根与系数的关系”为例[J]. 数学通讯, 2024, (23): 10-16.
- [2] 顾予恒, 汪晓勤.HPM 视角下圆锥曲线统一性探究教学[J]. 数学通报, 2024, 63(10): 27-32.
- [3] 刘宗潇.HPM 视野下探究性学习的优化策略——以“波尔约-格维也纳定理”的生成教学为例[J]. 中学数学教学参考, 2024, (29): 20-22.
- [4] 苏佳敏.HPM 视角下高中数学探究式教学的实践研究[D]. 江西师范大学, 2024.
- [5] 苏佳敏, 桂国祥. 基于 HPM 视角的高中数学探究性教学——以球的体积公式教学为例[J]. 中国数学教育, 2024, (04): 29-34.
- [6] 刘梦哲, 汪晓勤, 邹佳晨. 聚焦学生探究, 构建留白课堂——HPM 视角下“异面直线间的距离”同课异构课例分析[J]. 数学教学, 2023, (12): 6-13.
- [7] 张世民.HPM 视域下“数学阅读”助推有效教学的探究[J]. 数学教学通讯, 2023, (23): 60-62.
- [8] 李明树, 王晓峰. 基于 HPM 的数学探究学习建构——以“确定圆的条件”的教学为例[J]. 中国数学教育, 2023, (Z3): 14-17+57.
- [9] 梁建辉. 基于 HPM 视角的高中数学教学探究——以“两角和与差的余弦公式”一课的教学为例[J]. 数学教学通讯, 2020, (36): 24-25.
- [10] 袁思情.HPM 视野下高中数学探究性作业的设计与实践[J]. 现代教学, 2020, (S1): 24-25.
- [11] 马亚斌. 基于 HPM 的高中数学问题式教学

- 策略设计探究[J].数理化解题研究, 2019, (30): 29-30.
- [12]刘芳瑶, 吴缘缘, 储亚伟.多元表征与学习进阶整合的高中数学概念教学研究——以函数为例[J].中学数学研究(华南师范大学版), 2022, (22): 10-13.
- [13]郭建理.基于“课堂深度学习”的高中数学教学误区管窥——以“基本不等式的应用”习题课教学为例[J].中学数学教学参考, 2022, (34): 43-46.
- [14]徐道奎.单元和整体视角下的双曲线概念教学——兼谈对人教版高中数学(A版)新教材学习、研究及教学体会[J].中小学数学(高中版), 2022, (11): 45-50.
- [15]郑金宾.培养成长型思维, 促使高中数学课堂深度学习发生——以“空间点、直线、平面之间的位置关系”的教学为例[J].中小学数学(高中版), 2022, (11): 5-8.