

# 基于 Copula 函数的机械系统可靠性分析

徐倩<sup>1</sup>, 陈鹏<sup>2</sup>, 李晓科<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> 郑州轻工业大学数学与信息科学学院, 河南郑州, 中国

<sup>2</sup> 郑州轻工业大学机电工程学院, 河南郑州, 中国

\*通讯作者

**【摘要】**机械系统在运行中常面临载荷波动、材料性能不稳定、结构差异以及环境条件变化等多种不确定性因素。现有的可靠性计算方法多数假设各随机变量之间相互独立, 未能充分刻画变量之间的依赖关系, 从而影响了分析结果的准确性。因此, 本文基于 Copula 理论、蒙特卡洛仿真方法以及应力-强度干涉模型, 构建了一种适用于考虑失效相关性的机械系统可靠性分析方法。对于存在多维相关失效模式的机械系统, 利用 Vine Copula 函数将多维失效可靠性分析问题转化为多个二维 Copula 函数进行分析, 然后通过极大似然估计法和 AIC 准则实现最优 Copula 函数选择, 利用常用二维 Copula 函数描述相关性的优势, 提出一种考虑零件失效模式间相关性的可靠性分析方法。最后通过传动轴和一级齿轮减速机构的算例对上述方法的有效性进行验证, 证实了该方法在多维相关失效模式机械系统可靠性分析的合理性。

**【关键词】**机械系统; 可靠性分析; Copula 函数; 应力-强度干涉模型; Monte Carlo

## 1. 引言

可靠性技术已经被广泛应用于航空航天、汽车制造、电力系统、通信网络等领域中, 在实际的可靠性分析中, 往往要考虑到整个机械系统的可靠度, 然而, 现有理论对于机械系统的可靠性分析, 大部分均采用单一失效模式或者相互独立的多种失效模式的理论方法。但机械系统及其零部件的复杂性在于失效模式之间往往是相互作用的。因此, 为了能得到更符合实际的结果, 必须考虑各失效模式间的相关性。

Nataf 变换是处理失效模式相关性的重要手段, 其通过相关系数矩阵描述变量间的相关性, 然而当变量之间存在非线性相关时, 可能会产生较大的误差。而 Copula 函数构造简单, 结果描述准确, 因此在失效模式相关性问题上得到了广泛应用。唐等<sup>[1]</sup>研究了不同 Copula 函数应用于二元失效模式建模对系统可靠性的影响; 孙等<sup>[2]</sup>用极大似然估计法估计混合 Copula 模型参数, 通过构建混合 Copula 模型来描述多失效模式间的相关性, 利用随机变量避免了经验分布导致的误差; Lebrun 等<sup>[3]</sup>利用 Copula 函数重新表述 Nataf 变换, 简化了 Nataf 变换自身计算的复杂性, 并且比较了在二维 Copula 函数下 Nataf 变换<sup>[4]</sup>和 Rosenblatt 变换<sup>[5]</sup>计算系统可靠性的影响; 刘等<sup>[6]</sup>提出一种 Copula 函数

模型分析的多功能机械系统竞争失效条件下的可靠度; 姜等<sup>[7]</sup>提出一种基于 Copula 函数证据理论相关性分析的结构可靠性计算方法, 解决变量间的相关性问题。

虽然对于机械系统可靠性分析的研究取得了一些进展, 但是仍存在复杂多维失效模式的可靠性分析难以计算, 以及不同的工程问题应该如何选择最佳的 Copula 函数等问题, 难以适应复杂多变的工程问题需求。为解决该问题, 本文引入 Vine Copula 建模策略, 将复杂的多维失效模式可靠性问题分解为多个二维 Copula 函数组合进行建模分析。结合极大似然估计与 AIC 信息准则, 实现对最优 Copula 结构的选择, 充分发挥常见二维 Copula 函数在相关性刻画方面的优势。由此构建出一种能够有效反映零部件失效模式依赖关系的系统可靠性评估方法。

## 2. Vine Copula 函数

针对多维复杂机械系统, Copula 函数能很好地描述复杂多维变量间相关性, 并建立多变量间的联合分布函数。

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (1)$$

若  $F(x)$  和  $G(y)$  连续, 则  $C(\cdot)$  是唯一确定的, 否则,  $C(\cdot)$  在  $RanF(x) \times RanG(y)$  上是唯一确定的。若  $F(x)$  和  $G(y)$  均是分布函数, 且  $C(F(x), G(y))$  是两者的联合分布函数, 则

两边边缘分布函数分别为  $F(x)$  和  $G(y)$ 。

$n$  维 Sklar 定理: 设  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  为  $n$  维随机向量,  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  为  $n$  维联合分布函数, 其边缘分布函数分别为:  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$ 。则对任意的  $x \in [0, 1]^n$  存在一个  $n$  维 Copula 函数  $C(\cdot, \dots, \cdot)$ , 使得式 (2) 成立。

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (2)$$

若  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$  连续, 则  $C(\cdot, \dots, \cdot)$  是唯一确定的, 否则,  $C(\cdot, \dots, \cdot)$  在  $RanF_1(x_1) \times RanF_2(x_2) \times \dots \times RanF_n(x_n)$  上是唯一确定的。若  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$  均是分布函数, 且  $C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$  是一个联合分布函数, 则其边缘分布函数分别为  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)$  [8]。

随后, Nelsen 等 [9] 给出了  $n$  元 Copula 函数的定义:  $n$  维 Copula 函数是指具有以下性质的函数:

- (1)  $C(\cdot, \dots, \cdot)$  定义域为  $x \in [0, 1]^n$ ;
- (2)  $C(\cdot, \dots, \cdot)$  零基面并且是  $n$  维增函数;
- (3)  $C(\cdot, \dots, \cdot)$  的边缘分布函数为  $C_i(\cdot)$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, n$ , 并且满足条件:  $C_i(u_i) = (1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ , 其中  $u_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$ 。

由 Nelsen 定义可知,  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots, F_n(\cdot)$  是连续的一元分布函数, 若令  $u_i = F_i(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$  的边缘分布都是服从于  $u_i \in [0, 1]$  均匀分布的多元分布函数。

对式 (2) 的左右两边分别求导可得式 (3), 则随机向量  $x$  的概率密度函数为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (3)$$

式中,  $f_i(x_i)$  为边缘概率密度函数,  $c(\cdot)$  为 Copula 函数的概率密度函数。

令  $u_i = F_i(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $c(\cdot)$  可用式

(4) 求解:

$$c(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n} \quad (4)$$

最常见的 Copula 函数主要分为两大类: 椭圆形 Copula 函数, 如 Gaussian Copula; 阿基米德 Copula 函数如 Clayton Copula、Frank Copula 和 Gumbel Copula [10]。但是这几种只能用于处理两变量间的相关性。因此, 若要处理两变量以上的多维变量间的相关性, 往往使用 Vine Copula 函数, 将多维变量间的相关性问题, 转化为可以使用常用 Copula 函数的二维相关性问题。

Vine Copula 是一种多维概率分布建模方法, 其核心思想是将高维联合分布拆解为各变量的边缘分布与若干二维 Copula 函数的组合, 从而实现对变量间依赖关系的灵活描述, 并且可以通过灵活地选择不同的二元分布来构建多维概率分布模型, 描述不同变量之间的相关性。

Vine 的定义: 若某一结构满足特定的分解条件, 即将  $n$  维随机变量的联合分布构建为一系列边缘分布与二维 Copula 函数的嵌套组合, 则可称  $v$  为建立在  $n$  维变量上的 Vine Copula。

$$(1) v = (T_1, T_2, \dots, T_m);$$

(2)  $T_1$  是 Vine 上的一棵树,  $T_1$  上的结点  $N_1 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , 两两结点的连线称为边缘,  $T_1$  所有边缘的集合记为  $E_1$ ;

(3)  $T_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$  表示 Vine 上的第  $i$  棵树,  $T_i$  上的边缘集合记为  $E_i$ , 且  $T_i$  上的结点  $N_i$  满足条件:  $N_i \subset N_1 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{i-1}$ 。

Vine 是由多棵树构成的复杂结构, 每棵树进一步由多个节点以及连接这些节点的边缘所组成。这些树、节点和边缘共同构成了多个集合, 这些集合通过特定的组合方式形成了 Vine [11]。不同的组合方式会赋予 Vine 结构独特的性质。

在 Vine Copula 函数中, 存在 C-Vine 和 D-Vine 两种分解方式。C-Vine 分解方式适用于描述那些具有关键变量的相关性结构, 而 D-Vine 适用于描述具有邻近或顺序关系变量之间的相关性结构, 因其对于邻近关系的相关结构有良好描述能力。

## 2.1 C-Vine Copula 函数

在 C-Vine 模型中,  $n$  维 C-Vine 模型中结构包含  $n-1$  层树  $T_j, (j = 1, 2, \dots, n-1)$ , 每棵树  $T_j$  中仅有唯一的点连接到  $n-j$  条边, 每一条边对应一个二维 Copula 函数。则一个  $n$

维随机向量  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合概率

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i+j|1, \dots, j-1} \left( F_{j|1, \dots, j-1}(x_j | x_1, \dots, x_{j-1}), F_{i+j|1, \dots, j-1}(x_{i+j} | x_1, \dots, x_{j-1}) \right) \quad (5)$$

式中:  $f_k(x_k)$  为各变量的边缘概率密度函数,  $c_{j, j+1|1, \dots, j-1}$  为作用在  $F_{j|1, \dots, j-1}(g)$  和  $F_{j+1|1, \dots, j-1}(g)$  上的二维 Copula 函数。

如图 1 为三维 C-Vine 模型结构, 对应的联合概率密度函数可分解为:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = & f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \\ & \cdot c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot \\ & c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \\ & \cdot c_{23}(F_{2|1}(x_2 | x_1), F_{3|1}(x_3 | x_1)) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 D-Vine Copula 函数

$n$  维 D-Vine 模型中结构包含  $n-1$  层树

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_k(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i+j|1, \dots, i+j-1} \left( F_{i+j|1, \dots, i+j-1}(x_i | x_1, \dots, x_{i+j-1}), F_{i+j|1, \dots, i+j-1}(x_{i+j} | x_1, \dots, x_{i+j-1}) \right) \quad (7)$$

图 2 为三维 C-Vine 模型结构。

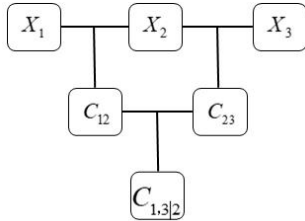


图 2. D-Vine 结构树状图

## 3. 基于 Copula 函数的可靠性分析方法

### 3.1 机械系统可靠性基本理论

应力-强度干涉模型是一种基于应力分布和强度分布的重合程度来评估可靠性的方法, 在机械可靠性设计中被广泛应用。在该模型中, 应力是导致零件或系统失效的所有外部因素, 强度是指零件或系统抵抗各种应力的力, 两者通常被视为服从特定概率分布的随机变量, 其统计特性在给定范围内可通过分布函数进行刻画。图 3 中,  $h(s)$  和  $f(s)$  分别表示应力和强度的概率函数。当零件的强度值大于其所承受的应力时, 可判定其处于可靠状态; 而在应力和强度概率分布曲线发生交叠的区域 (即阴影部分), 则表示两者产生干涉, 通常被视为零件发生失效的概率区域。则根据应力和强度之间的干涉关系, 可计算出可靠度和失效概率<sup>[12]</sup>。

### 3.2 机械系统可靠性的 Copula 模型

机械零件在相同的工作环境和载荷条件

密度函数可分解为:

$T_j$ , 每棵树  $T_j$ , ( $j=1, 2, \dots, n-1$ ) 有  $n-j-1$  各节点和  $n-j$  条边, 每一条边对应一个二维 Copula 函数。则一个  $n$  维随机向量  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的联合概率密度函数可分解为式 (7)。

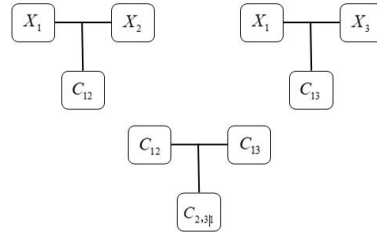


图 1. C-Vine 结构树状图

下, 失效模式有疲劳载荷、断裂、腐蚀等, 当某种失效模式发生时, 它会进一步促进其他失效模式的发生, 从而加速整个零件的失效。因此, 可以将这些失效模式视为一个串联系统。在这个系统中, 零件失效可视为由多个失效模式对应的功能函数构成的串联系统, 其中各功能函数之间存在相关性。这种失效依赖关系如图 4 所示。

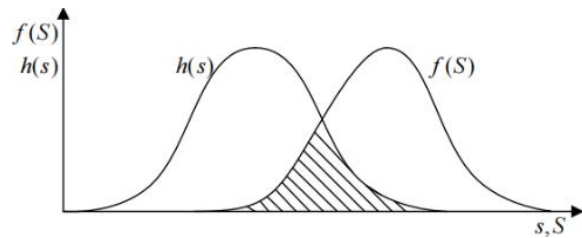


图 3. 应力-强度干涉曲线

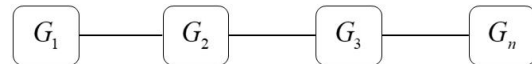


图 4 传动轴串联失效等效模型

若机械零件有  $m$  个不同的失效模式, 则对于不同失效模式的功能函数可用式 (8) 表示:

$$G_i(X) = G_i(X_1, X_2, \dots, X_n)^T, i=1, 2, \dots, m \quad (8)$$

式中,  $G_i(X)$  为第  $i$  个失效模式的功能函数, 可简化为  $G_i$ ,  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  为包含  $n$  个随机变量的向量。

系统失效概率可用式 (9) 表示:

$$P_f \left( \bigcup_{i=1}^m (G_i \leq g_i) \right) = \int \cdots \int_{\bigcup_{i=1}^m (G_i \leq g_i)} f(x_1, x_2, \dots, x_k) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (9)$$

式中,  $g_i(X)$  为第  $i$  个失效模式的需用值, 可简化为  $g_i$ ,  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  为各失效模式随机变量间的联合概率密度函数。

记系统第  $i$  个失效模式发生失效的概率为  $P_{fi} = P_{fi}(G_i \leq g_i) = F_i(g_i)$ , 则利用 Copula 函数得到具有相关性的不同失效模式间的失效概率可由式 (10) 表示:

$$P((G_1 \leq g_1) \cap \cdots \cap (G_m \leq g_m)) = C(P_{f1}(G_1 \leq g_1), \dots, P_{fm}(G_m \leq g_m)) \quad (10)$$

式中,  $C(\cdot)$  为基于  $P_{f1}(G_1 \leq g_1), \dots, P_{fm}(G_m \leq g_m)$  间的 Copula 分布函数值。

若某机械零件具有  $m$  种失效模式, 则该零件具有相关性的多元串联失效模式失效概率可用式 (11) 表示:

$$P_f = P \left( \bigcup_{i=1}^m (G_i \leq g_i) \right) = \sum_{i=1}^m P((G_i \leq g_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} P((G_i \leq g_i) \cap (G_j \leq g_j)) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} P((G_i \leq g_i) \cap (G_j \leq g_j) \cap (G_k \leq g_k)) - \cdots + (-1)^{m+1} P \left( \bigcap_{i=1}^m (G_i \leq g_i) \right) = \sum_{i=1}^m F_i(g_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} C(F_i(g_i), F_j(g_j)) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} C(F_i(g_i), F_j(g_j), F_k(g_k)) - \cdots + (-1)^m C(F_1(g_1), F_2(g_2), \dots, F_m(g_m)) \quad (11)$$

### 3.3 最优 Copula 函数的选择

对于不同实际应用情况, 使用不同类型的 Copula 函数得到的可靠度精度可能会有所差别。因此, 针对不同的应用情况, 选择最优 Copula 函数是提高试验准确性的一个重要步骤

AIC 信息准则用于体现估计模型的复杂度和数据拟合的优良性, 主要作为衡量不同统计模型拟合优度的一个标准, AIC 值的计算可用式 (12) 表示:

$$AIC = 2k - 2L_c \quad (12)$$

式中:  $k$  为 Copula 函数中参数数量,  $L_c$  为模型的似然对数函数。

在计算似然对数函数时, 首先需选定一种 Copula 函数, 随后针对机械系统中任意一对存在于多失效模式下的随机变量  $X_1$ 、 $X_2$ , 其边缘分布函数分别为  $F_1(x_1)$ 、 $F_2(x_2)$ , 由

两变量得到的样本集为  $\{x_{1i}, x_{2i}\}, i=1, 2, \dots, n$ , 则  $L_c$  值可通过式 (13) 计算:

$$L_c = \sum_{i=1}^n \ln c(F_1(x_{1i}), F_1(x_{1i}) | \theta) \quad (13)$$

式中  $c$  为 Copula 函数的概率密度函数,  $\theta$  为 Copula 函数的相关参数。

其中, 相关参数  $\theta$  的确定需要通过极大似然估计法进行确定, 即式 (14):

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} L_c \quad (14)$$

AIC 值的计算过程为, 先确定有极大似然估计至下的相关参数  $\theta$  值; 求在  $\theta$  值下的似然对数值  $L_c$ ; 将  $L_c$  代入式 (14), 得到 AIC 值;

AIC<sup>[13]</sup> 值越小, 则该 Copula 函数对应的样本数据的拟合程度越好, 即通过比较各 Copula 函数下的 AIC 值大小, 选择最优 Copula 函数。机械系统可靠性分析如图 5 所示。

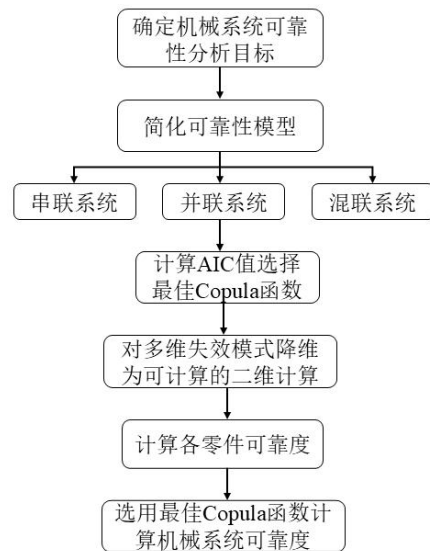


图 5.机械系统可靠性分析

### 4.算例分析

为进一步说明上述可靠性分析方法的应用效果, 本文以传动轴在两种及三种失效模式下的可靠度计算为例进行说明。

某传动轴仅承受转矩作用, 危险截面处最大转矩为  $T = (60 \pm 18) KN \cdot m$ , 直径为  $d = 150mm$ , 材料为 45 钢调质, 车削加工。轴的长度为  $l = 500mm$ , 轴的转速为  $n = (1500 \pm 180)r / min$ , 轴质量为  $60kg$ <sup>[14]</sup>。

记传动轴各失效模式的功能函数为  $G_i$ , ( $i=1, 2, 3$ ), 传动轴能具有的失效模式及其功能函数见表 1。

表 1.传动轴各失效模式功能函数

失效类型	静强度失效	疲劳强度失效
功能函数	$G_1 = \tau_s - \frac{1.3T}{W_\tau}$	$G_2 = \tau_{0k} - \frac{T}{W_\tau}$
	扭转刚度失效	
	$G_3 = [\varphi] - \frac{Tl}{GI}$	

表 1 中所涉及参数见表 2。

表 2.传动轴参数含义及取值

参数符号及含义	分布类型	分布参数
抗拉屈服极限 $\sigma_s / MPa$	正态分布	$N(280, 14^2)$
材料强度极限 $\sigma_b / MPa$	正态分布	$N(600, 30^2)$
最大转矩 $T / KN$	正态分布	$N(60, 6^2)$
扭转刚度 $\frac{Tl}{GI} / (N \cdot m / rad)$	正态分布	$N(0.0075, 0.0708^2)$
直径 $d / mm$	常数	150
长度 $l / mm$	常数	500
需用扭转刚度 $[\varphi] / (N \cdot m / rad)$	常数	0.0075
材料剪切弹性模量 变异系数 $V_G$	常数	0.0297
直径变异系数 $V_d$	常数	0.001
最大转矩变异系数 $V_T$	常数	0.1
抗拉屈服极限变异 系数 $V_{\sigma_s}$	常数	0.06

传动轴的应力和强度均服从正态分布，且应力  $R: N(400, 40^2)$ ，强度  $S: N(600, 60^2)$ 。

使用 MCS 方法，得传动轴可靠度为  $R_{MCS} = 0.8721$ ，图 6 为应力-强度频数直方图。由应力-强度干涉理论，可以直观地看出重叠部分样本发生失效。

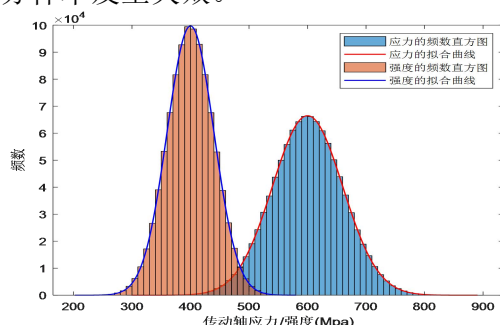


图 6.传动轴应力-强度频数直方图

#### 4.1 二维失效模式

若传动轴有两种失效模式：静强度失效和疲劳强度失效。则取抗拉屈服极限  $\sigma_s$  和材料强度极限  $\sigma_b$  为随机变量，随机变量的向量为  $X = [\sigma_s, \sigma_b]^T$ ，且认为表 2 中其余参数均为常数，其中服从正态分布的参数取值为其均值。

下面说明可靠性分析的实际步骤：

(1) 选择最优 Copula 函数，计算四种 Copula 函数的 AIC 值如表 3。

表 3.四种 Copula 函数的参数估计和 AIC 值

Copula 函数	相关参数 $\theta$	AIC 值
Gaussian	0.1680	398.04
Gumbel	inf	inf
Clayton	inf	inf
Frank	inf	inf

由表 3 可知两变量间的最优 Copula 函数为 Gaussian Copula。

(2) 由一次二阶矩法计算传动轴的静强度可靠度  $R_1$  为 0.9391，疲劳强度可靠度  $R_2$  为 0.8662。

(3) 由独立假设理论得传动轴的可靠度为  $R_d = 0.8134$  和最薄弱环节理论得传动轴的可靠度为  $R_b = 0.8662$ 。

(4) 使用最优 Copula 函数计算传动轴在 Gaussian Copula 下的可靠度为： $R_c = 0.8183$ 。

$R_c$  对应得相对误差为： $\varepsilon = \frac{|R_c - R_{MCS}|}{R_{MCS}} = 0.0616\%$

由简单界限理论，可得  $R_b < R_c < R_d$ ，j 相对误差较小，进一步证明了二维 Copula 模型在计算机机械零件失效模式相关可靠度方面的有效性和合理性。

#### 4.2 三维失效模式

若传动轴有三种失效模式：静强度失效、疲劳强度失效和扭转刚度失效。则取抗拉屈服极限  $\sigma_s$ 、材料强度极限  $\sigma_b$  和最大转矩  $T$  为随机变量，随机变量的向量为  $X = [\sigma_s, \sigma_b, T]^T$ ，且认为表 2 中其余参数均为常数。

下面说明可靠性分析的实际步骤：

(1) 选择最优 Copula 函数，计算四种 Copula 函数的 AIC 值如表 4。

表 4.四种 Copula 函数的参数估计和 AIC 值

Copula 类型	相关参数 $\theta$	AIC 值
Gaussian	0.5628	394.56
Gumbel	inf	inf
Clayton	inf	inf
Frank	inf	inf

由表 4 可知两变量间的最优 Copula 函数

为 Gaussian Copula。

(2) 由一次二阶矩法计算传动轴在疲劳强度下的可靠度为:  $R_3 = 0.9999$ 。

(3) 由独立假设理论的传动轴的可靠度为  $R_d = 0.8135$  和最薄弱环节理论传动轴的可靠度为  $R_b = 0.8662$ 。

(4) 使用最优 Copula 函数计算传动轴在 Gaussian Copula 下的可靠度为:  $R_c = 0.8357$ 。

$R_c$  对应得相对误差为:  $\varepsilon = \frac{|R_c - R_{MCS}|}{R_{MCS}} = 0.0417$

由简单界限理论, 可得  $R_b < R_c < R_d$ , 相对误差较小, 进一步证明了 Vine Copula 模型在机械零件多失效模式相关可靠度的合理性。

### 5. 基于 Copula 函数的一级减速机构可靠性分析

如图 7 所示为一级减速器机械系统, 基本参数为输入功率  $P = 11KW$ , 输入轴转速  $n_1 = 970r/min$ , 输入轴危险截面直径  $d_1 = 45mm$ , 输出轴危险截面直径  $d_2 = 70mm$ , 齿轮模数  $m = 2$ , 小齿轮齿数  $Z_1 = 35$ , 大齿轮齿数  $Z_2 = 112$ 。

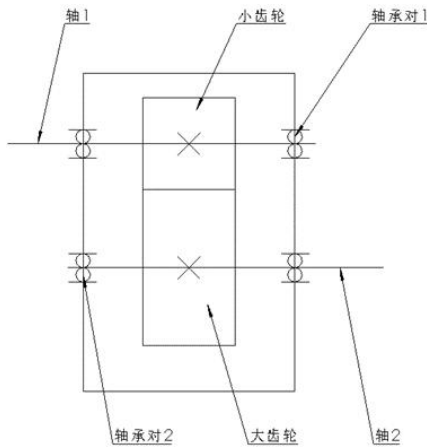


图 7. 一级齿轮减速器简图

引起一级减速器失效的零件有两根轴、两齿轮和两对轴承。由于轴承的失效时按解除疲劳强度功能函数计算而不是根据应力-强度干涉理论, 与轴和齿轮的失效形式有所不同, 因此采用独立假设理论计算对轴承可靠度, 两对轴承可靠度均为  $R_5 = 0.98$ 。简化的一级减速机构串联如图 8 所示。



图 8. 一级减速器串联可靠性模型

设各零件应力、强度均服从正态分布, 相关数据如表 5 所示。

表 5. 参数符号及其取值

参数符号	分布类型	分布参数
轴 1 应力 $S_1$	正态分布	$N(446, 40^2)$
轴 1 强度 $R_1$	正态分布	$N(650, 60^2)$
小齿轮应力 $S_2$	正态分布	$N(407, 40^2)$
小齿轮强度 $R_2$	正态分布	$N(528, 50^2)$
大齿轮应力 $S_3$	正态分布	$N(295, 28^2)$
大齿轮强度 $R_3$	正态分布	$N(500, 50^2)$
轴 2 应力 $S_4$	正态分布	$N(350, 35^2)$
轴 2 强度 $R_4$	正态分布	$N(600, 60^2)$

设轴 1 为零件 1、小齿轮为零件 2、大齿轮为零件 3、轴 2 为零件 4、轴承为零件 5。计算该串联机械系统可靠性的实际步骤如下:

(1) 选用 Gaussian Copula 函数进行可靠性分析。结果如表 6 所示。

表 6. 零件可靠性指标及可靠度

零件	可靠性指标 $\beta_i$	可靠度 $R_i$
小齿轮	1.8150	0.9652
大齿轮	3.5312	0.9998
轴 1	2.5879	0.9952
轴 2	3.5991	0.9998
两对轴承	1.5500	0.9800

(2) 基于独立假设理论和最薄弱环节理论, 对一级减速器机械系统进行可靠性评估, 计算所得系统可靠度为:  $R_d = 0.8856$ 、 $R_b = 0.9652$ 。

(3) 计算该机械系统的可靠度可用式 (15) 表示:

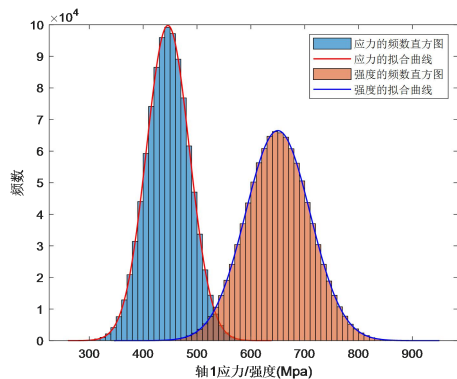
$$\begin{aligned}
 R_c = & 1 - P_{f1} - P_{f2} - P_{f3} - P_{f4} - 4P_{f5} \\
 & + C(P_{f1}, P_{f2}) + C(P_{f2}, P_{f3}) \\
 & + C(P_{f3}, P_{f4}) - C(P_{f1}, P_{f2}, P_{f3}) \\
 & - C(P_{f2}, P_{f3}, P_{f4}) \\
 & + C(P_{f1}, P_{f2}, P_{f3}, P_{f4})
 \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $P_{fi}$  为各零件失效概率,  $C(P_{f1}, P_{f2}) = 2.1390 \times 10^{-4}$ ,  $C(P_{f2}, P_{f3}) = 8.2800 \times 10^{-4}$ ,  $C(P_{f3}, P_{f4}) = 6.1836 \times 10^{-8}$ 、 $C(P_{f1}, P_{f2}, P_{f3}) = 0$ ,  $C(P_{f2}, P_{f3}, P_{f4}) = 0$ 、 $C(P_{f1}, P_{f2}, P_{f3}, P_{f4}) = 0$

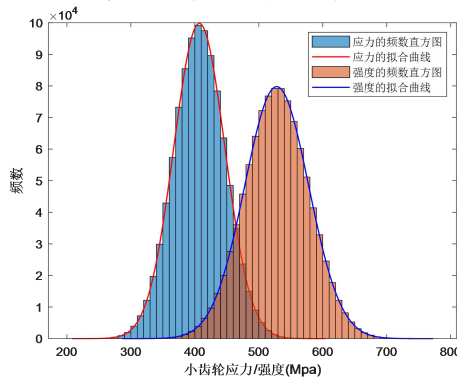
得到其可靠度为:  $R_c = 0.9484$ 。

(4) 使用 MCS 计算传动轴可靠度为  $R_{MCS} = 0.8546$ , 相对误差为  $\varepsilon = 0.1229$ 。图 9

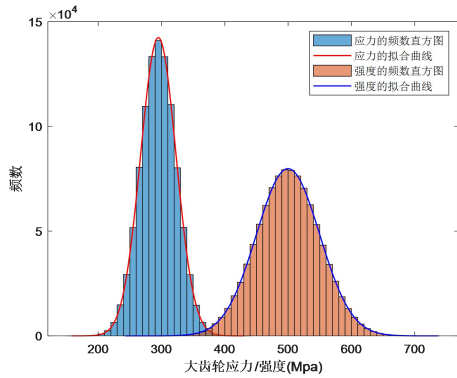
为应力-强度频数直方图。由应力-强度干涉理论，可以直观地看出重叠部分样本发生失效。



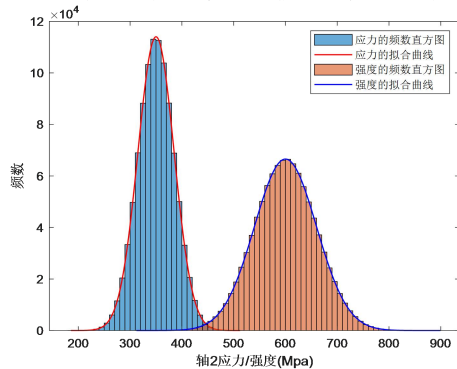
(1) 轴 1 应力-强度频数直方图



(2) 小齿轮应力-强度频数直方图



(3) 大齿轮应力-强度频数直方图



(4) 轴 2 应力-强度频数直方图

图 9.应力-强度频数直方图

由简单界限理论，可得  $R_b < R_c < R_d$ ，且结果具有较小得相对误差，进而得到 Vine Copula 模型计算机械零件失效模式相关可靠度的合理性。

## 6.结论

(1) 针对机械零件或系统开展可靠性分析，借助 Vine Copula 函数的降维特性，将复杂的多维失效模式问题转化为多个二维 Copula 函数的组合处理，从而有效简化了分析过程。

(2) 为提高计算精度，本文引入基于 AIC 准则的最优 Copula 函数选择方法。结合应力-强度干涉理论与一次二阶矩法，评估零件或系统在各失效模式下的可靠度；进一步利用简单界限理论，在独立假设理论和最薄弱环节理论的框架下，确定系统整体可靠度的合理范围，从而验证 Vine Copula 方法在多维相关失效分析中的适用性与有效性。

(3) 通过传动轴及一级齿轮减速机构的数值算例，验证了 Vine Copula 方法在处理机械零件与系统多维相关失效模式可靠性分析中的合理性和工程实用性。

## 参考文献

- [1] Tang X S, Li D Q, Zhou C B, et al. Impact of copulas for modeling bivariate distributions on system reliability[J]. Structural Safety, 2013, 44: 80-90.
- [2] Sun Y T, Luo L F, Zhang Q, et al. Reliability analysis of stochastic structure with multi-failure modes based on mixed Copula [J]. Engineering Failure Analysis, 2019, 105: 930-944.
- [3] Lebrun R, Dutfoy A. An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2009, 24(3):312-320.
- [4] Liu P, Kiureghian A D. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2):105-112.
- [5] Rosenblatt M. Remarks on a Multivariate Transformation[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(3):470-47.
- [6] 刘敬一, 庄新臣, 张玉刚, 等. 基于 Copula 函数的多功能机械系统竞争失效分析方法[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40 (04):909-917.

- [7] 姜潮, 张旺, 韩旭. 基于 Copula 函数的证据理论相关性分析模型及结构可靠性计算方法 [J]. 机械工程学报, 2017(16):213-223.
- [8] Sklar A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges [J]. Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 1959(8):229-231.
- [9] Nelsen RB. An introduction to copulas [M]. New York: Springer, 2006:32-34.
- [10] 吴娟, 刘次华, 邱小霞, 等. 多元 Copula 参数模型的选择 [J]. 武汉大学学报(理学版), 2008, (03): 267-270.
- [11] 卢颖. Copula 理论在相关性分析中的应用及其多元扩展 [D]. 天津科技大学, 2009, 25.
- [12] 何巨东, 李会杰, 邓斌, 等. 基于应力-强度干涉理论的接触网零部件可靠性计算 [J]. 机械研究与应用, 2008, (02):83-85.
- [13] 张济民, 王开文, 池茂儒. 基于 AIC 信息准则法的摆式列车倾摆伺服系统建模研究 [J]. 中国铁道科学, 2003, (06):7-10.
- [14] 喻天翔, 张选生, 张祖明, 等. 轴的多失效模式相关的可靠性计算 [J]. 机械传动, 2002, (03): 30-33+0. DOI:10.16578/j.issn.1004.2539.2002.03.011.